SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

Enrico Obrecht

PERTURBAZIONI SINGOLARI DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL SECONDO ORDINE IN UNO SPAZIO DI BANACH

21 maggio 1992

In questo seminario intendo esporre alcuni risultati relativi a equazioni differenziali del secondo ordine in uno spazio di Banach, in cui un parametro piccolo moltiplica la derivata seconda; ovviamente il punto interessante è il legame fra soluzione del problema con parametro e soluzione del problema limite.

Un'ampia monografia per problemi di vario tipo di perturbazioni singolari di equazioni a derivate parziali è quella di J.L. Lions [5].

Nel seguito mi sono limitato a trattare problemi per i quali l'equazione limite è di tipo parabolico o di Schrödinger; in effetti esistono anche risultati quando l'equazione limite è di tipo iperbolico, ma mi sembra che, in questo caso, le tecniche operatoriali si prestino meno bene a descrivere i risultati.

1. Perturbazione singolare parabolica

Le piccole oscillazioni di una membrana fissata sul bordo e immersa in un mezzo a elevata viscosità possono essere descritte dall'equazione

$$\rho\, v_{tt} + \gamma\, v_t = \sigma\, \Delta v \ ,$$

dove $v(x,t)$ rappresenta lo spostamento verticale nel punto $x \in \Omega$ al tempo t, mentre ρ, γ, σ sono, rispettivamente, la densità superficiale, il coefficiente di viscosità e la tensione della membrana. Inoltre v soddisfa la condizione al contorno

$$v(x,t) = 0\ , \quad \forall\, x \in \partial\Omega \times [0,T]\ ,$$

e le condizioni iniziali

$$v(x,0) = u_0(x)\ ,\ v_t(x,0) = u_1(x)\ ,\ \forall\, x \in \Omega.$$

Effettuando il cambiamento di funzione incognita

$$v(x,t) = u(x, \tfrac{\sigma}{\gamma} t)\ ,$$

la funzione u sarà soluzione del problema

$$\begin{cases} \dfrac{\sigma\rho}{\gamma^2}\, u_{tt} + u_t = \Delta u\ , & \text{in } \Omega \times [0,T], \\ u(x,t) = 0, & \text{in } \partial\Omega \times [0,T], \\ u(x,0) = u_0(x)\ ,\ u_t(x,0) = \dfrac{\gamma}{\sigma}\, u_1(x)\ , & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

Ponendo $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{\sigma\rho}}{\gamma}$, l'equazione precedente diventa

$$\varepsilon^2 u_{tt} + u_t = \Delta u\ ,$$

dove ε è piccolo e positivo, se il coefficiente di viscosità è elevato, mentre la seconda condizione iniziale viene a dipendere da ε:

$$u_t(x,0) = \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{\frac{\rho}{\sigma}}\, u_1(x).$$

Con questa motivazione fisica, considererò il problema di Cauchy in uno spazio di Banach X

$$(1)\qquad \begin{cases} \varepsilon^2 u_\varepsilon'' + u_\varepsilon' = Au_\varepsilon + f_\varepsilon(t), & t \geq 0, \\ u_\varepsilon(0) = u_0(\varepsilon)\ ,\ u_\varepsilon'(0) = u_1(\varepsilon), \end{cases}$$

dove A è un operatore lineare in X. Esaminerò, in particolare, anche il comportamento della soluzione – generalizzata e stretta – del problema (1) per $\varepsilon \to 0+$, con particolare riguardo alla sua eventuale convergenza alla soluzione del problema limite

$$(2)\qquad \begin{cases} z' = Az + f(t), & t \geq 0\ , \\ z(0) = u_0\ . \end{cases}$$

Cominciamo con l'esaminare condizioni che garantiscano che il problema (1) è ben posto. A tal fine ricordo che una funzione coseno astratta $\mathcal{C}$ è una funzione fortemente continua da $\mathbb{R}$ a $\mathcal{L}(X)$, tale che

$$\mathcal{C}(t+s) + \mathcal{C}(t-s) = 2\,\mathcal{C}(t)\mathcal{C}(s)\ ,\ \forall\, t,s \in \mathbb{R};$$

viene detto generatore infinitesimale di $\mathcal{C}$ l'operatore A, definito da

$$Ax = \lim_{h\to 0} \frac{2}{h^2}(\mathcal{C}(h) - I)x\ ,$$

avente per dominio l'insieme degli $x \in X$, per i quali tale limite esiste. E' ben noto che il problema di Cauchy

$$(3)\qquad \begin{cases} u'' = Au\ , & t \in \mathbb{R}\ , \\ u(0) = u_0\ ,\ u'(0) = u_1\ , \end{cases}$$

dove A è un operatore lineare in X, è ben posto se, e solo se, A è il generatore di una funzione coseno astratta $\mathcal{C}$; in tal caso, se $u_0, u_1 \in \mathcal{D}(A)$, il problema ha come unica soluzione

$$(4)\qquad u(t) = \mathcal{C}(t)u_0 + \mathcal{S}(t)u_1\ ,$$

dove $\mathcal{S}(t) = \int_0^t \mathcal{C}(s)x\, ds$ è la funzione seno associata a $\mathcal{C}$. Se u_0 oppure u_1 non appartengono a $\mathcal{D}(A)$, la funzione u, definita dalla (4), viene detta soluzione generalizzata del problema (3). Si può mostrare che, se $\mathcal{C}$ è una funzione coseno astratta, esistono $C, \omega \in \mathbb{R}$, tali che

$$(5)\qquad \|\mathcal{C}(t)\| \leq C\cosh(\omega t)\ ,\ \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Se A è il generatore di una funzione coseno, allora esso è anche il generatore del semigruppo

$$S(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{s^2}{4t}\right) \mathcal{C}(s)x \, ds ,$$

che risulta essere analitico nel semipiano Re z > 0 e per il quale vale la stima

$$\|S(t)\| \leq C\, e^{\omega^2 t}, \quad \forall\, t \geq 0 .$$

Ritorniamo ora ai problemi (1) e (2). Se supponiamo, come faremo sempre nel seguito, che A sia il generatore di una funzione coseno $\mathcal{C}$, il problema limite risulta quindi essere ben posto. Mostriamo ora che è ben posto anche il problema (1) con $\varepsilon>0$. A tal fine, ponendo

$$v_\varepsilon(t) = \exp\left(\frac{t}{2\varepsilon}\right) u_\varepsilon(\varepsilon t) ,$$

il problema (1) si trasforma nel seguente

$$(6) \qquad \begin{cases} v_\varepsilon'' = (A + \dfrac{1}{4\varepsilon^2} I)\, v_\varepsilon + \exp\left(\dfrac{t}{2\varepsilon}\right) f_\varepsilon(\varepsilon t) , & t \geq 0 , \\ v_\varepsilon(0) = u_0(\varepsilon) , \quad v_\varepsilon'(0) = \dfrac{1}{2\varepsilon} u_0(\varepsilon) + \varepsilon\, u_1(\varepsilon) . \end{cases}$$

Il problema (5) è ben posto, per il risultato seguente, ottenuto da Sova [7].

<u>PROPOSIZIONE 1.</u> Siano A il generatore infinitesimale di una funzione coseno astratta e $b \in \mathbb{C}$. Allora il problema di Cauchy

$$(7) \qquad \begin{cases} w'' = (A + b^2 I)\, w , \\ w(0) = w_0 , \\ w'(0) = w_1 , \end{cases}$$

è ben posto e, se $w_0, w_1 \in \mathcal{D}(A)$, la soluzione del problema (7) è

$$w(t) = \mathcal{C}_b(t)\, w_0 + \mathcal{S}_b(t)\, w_1 ,$$

dove

$$\mathcal{C}_b(t) = \mathcal{C}(t)x + bt \int_0^t \frac{I_1(b\sqrt{t^2 - s^2})}{\sqrt{t^2 - s^2}}\, \mathcal{C}(s)x \, ds ,$$

$$\mathcal{S}_b(t)x = \int_0^t I_0\left(b\sqrt{t^2 - s^2}\right) \mathcal{C}(s)x \, ds ;$$

qui con $\mathcal{C}$ si è indicata la funzione coseno astratta generata da A, mentre I_0 e I_1 sono le funzioni di Bessel modificate di ordine 0 e 1, rispettivamente, definite da

$$I_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} ,$$

$$I_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\,(n+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1} .$$

Da questo risultato si ricava che il problema (1) è ben posto e che, se $u_0(\varepsilon)$, $u_1(\varepsilon) \in \mathcal{D}(A)$, la sua soluzione è

$$u_\varepsilon(t) = \exp\left(-\frac{t}{2\varepsilon^2}\right) \mathcal{C}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) u_0(\varepsilon) + K_\varepsilon(t) \left(\frac{1}{2} u_0(\varepsilon)\right) + \tag{8}$$

$$+ \Sigma_\varepsilon(t) \left(\frac{1}{2} u_0(\varepsilon) + \varepsilon^2 u_1(\varepsilon)\right) + \int_0^t \Sigma_\varepsilon(t-s)\, f_\varepsilon(s)\, ds \ ,$$

dove

$$K_\varepsilon(t)x = \frac{t \exp\left(-\frac{t}{2\varepsilon^2}\right)}{\varepsilon^2} \int_0^{\frac{t}{\varepsilon}} \left(\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)^2 - s^2\right)^{-1/2} I_1\left(\frac{\sqrt{(t/\varepsilon)^2 - s^2}}{2\varepsilon}\right) \mathcal{C}(s)x\, ds \equiv$$

$$\equiv \int_0^{\frac{t}{\varepsilon}} \phi_\varepsilon(t,s)\, \mathcal{C}(s)x\, ds \ ,$$

$$\Sigma_\varepsilon(t)x = \frac{\exp\left(-\frac{t}{2\varepsilon^2}\right)}{\varepsilon} \int_0^{\frac{t}{\varepsilon}} I_0\left(\frac{\sqrt{(t/\varepsilon)^2 - s^2}}{2\varepsilon}\right) \mathcal{C}(s)x\, ds \equiv$$

$$\equiv \int_0^{\frac{t}{\varepsilon}} \psi_\varepsilon(t,s)\, \mathcal{C}(s)x\, ds \ .$$

Pertanto, nelle ipotesi fatte, sia il problema (1) sia il problema (2) sono ben posti. Cominciamo con l'esaminare il problema della convergenza della soluzione, esaminando il problema omogeneo ($f_\varepsilon \equiv 0$).

Utilizzando la formula (8), che definisce una soluzione generalizzata del problema (1), qualunque siano i dati iniziali, e la stima (5) per la funzione coseno astratta, si ottiene la seguente maggiorazione, valida per ogni soluzione generalizzata del problema (1):

$$\|u_\varepsilon(t)\| \le C \exp\left(-\frac{t}{2\varepsilon^2}\right) \cosh\left(\frac{\omega t}{\varepsilon}\right) \|u_0(\varepsilon)\| +$$

$$(9) \qquad + C \int_0^{\frac{t}{\varepsilon}} \phi_\varepsilon(t,s) \cosh(\omega s) \frac{1}{2} \|u_0(\varepsilon)\| \, ds +$$

$$+ C \int_0^{\frac{t}{\varepsilon}} \psi_\varepsilon(t,s) \cosh(\omega s)\left(\frac{1}{2} \|u_0(\varepsilon)\| + \varepsilon^2 \|u_1(\varepsilon)\| \right) ds .$$

Poiché $\cosh(\omega t)$ è una funzione coseno astratta in $\mathbb{C}$ con generatore ω^2, il secondo membro della (9) è la soluzione del problema scalare

$$(10) \qquad \begin{cases} \varepsilon^2 \xi_\varepsilon'' + \xi_\varepsilon' = \omega^2 \xi_\varepsilon , \\ \xi_\varepsilon(0) = \|u_0(\varepsilon)\|, \ \xi_\varepsilon'(0) = \|u_1(\varepsilon)\| . \end{cases}$$

Scrivendo esplicitamente la soluzione del problema (10), si ottiene la stima

$$(11) \qquad \|u_\varepsilon(t)\| \le C\, e^{\omega^2 t} \left(\|u_0(\varepsilon)\| + \varepsilon^2 \|u_1(\varepsilon)\| \right) ,$$

valida $\forall\, u_0(\varepsilon), u_1(\varepsilon) \in X$, cioè per le soluzioni generalizzate del problema (1) nel caso omogeneo.

Esaminiamo ora la convergenza di u_ε a z, soluzione del problema parabolico (2) nel caso omogeneo. Si ha:

$$(12) \quad u_\varepsilon(t) - z(t) = (\Phi_\varepsilon(t) - S(t))\, u_0 + \Phi_\varepsilon(t)(u_0(\varepsilon) - u_0) + \Psi_\varepsilon(t)\, u_1(\varepsilon) ,$$

dove $\Phi_\varepsilon(t)$ e $\Psi_\varepsilon(t)$ sono gli operatori di evoluzione associati al problema (1), tali cioè che

$$u_\varepsilon(t) = \Phi_\varepsilon(t)\, u_0(\varepsilon) + \Psi_\varepsilon(t)\, u_1(\varepsilon) ,$$

e $S(t)$ è il semigruppo analitico generato da A. Utilizzando la stima (11), si ottiene

$$\|\Phi_\varepsilon(t)\, (u_0(\varepsilon) - u_0)\| \le C\, e^{\omega^2 t} \|u_0(\varepsilon) - u_0\| ,$$

$$\|\Psi_\varepsilon(t)\, u_1(\varepsilon)\| \le C\, \varepsilon^2 e^{\omega^2 t} \|u_1(\varepsilon)\| .$$

E' invece tecnicamente piuttosto complicato stimare il primo termine al secondo membro della (12); per farlo è opportuno supporre che $u_0 \in \mathcal{D}(A)$. Si ottiene alla fine il seguente risultato di Kisynski [4].

<u>TEOREMA 2.</u> Sia A il generatore infinitesimale della funzione coseno astratta $\mathcal{C}$, che verifica la disuguaglianza $\|\mathcal{C}(t)\| \le C \cosh(\omega t)$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$; allora, se u_ε è la soluzione generalizzata del problema (1) nel caso omogeneo e se z è la soluzione stretta del problema (2) nel caso omogeneo, si ha, $\forall\, u_0 \in \mathcal{D}(A)$, $\forall\, u_0(\varepsilon), u_1(\varepsilon) \in X$:

$$(13) \ \|u_\varepsilon(t) - z(t)\| \le C e^{\omega^2 t} \left(\|u_0(\varepsilon) - u_0\| + \varepsilon^2 (1 + \omega^2 t)\, \|Au_0\| + \varepsilon^2 \|u_1(\varepsilon)\| \right), \ \forall\, t \ge 0.$$

Da ciò segue che u_ε converge a z, uniformemente sui compatti di $[0,+\infty[$, se

$u_0(\varepsilon) \to u_0$ e $\varepsilon^2 u_1(\varepsilon) \to 0$.

In realtà, come ha mostrato Fattorini [2], la convergenza uniforme sui compatti si può ottenere anche senza l'ipotesi che $u_0 \in \mathcal{D}(A)$; però, in assenza di tale ipotesi ulteriore, viene a cadere la precisa stima (13).

Rafforzando le ipotesi sui dati iniziali, Kisynski [4] ha ottenuto anche una stima sulle derivate.

<u>TEOREMA 3.</u> Nelle ipotesi del Teorema 2, se $u_0 \in \mathcal{D}(A^2)$, $u_0(\varepsilon) \in \mathcal{D}(A)$, $u_1(\varepsilon) \in X$, si ha:

$$\|u_\varepsilon'(t) - z(t)\| \leq Ce^{\omega^2 t}(\varepsilon^2 (1 + \omega^2 t)\, \|A^2 u_0\| + \|u_1(\varepsilon) - Au_0\| + \|u_1(\varepsilon) - Au_0(\varepsilon)\|), \forall t \geq 0.$$

Di qui segue la convergenza uniforme delle derivate sui compatti se

$$u_1(\varepsilon) \to Au_0\,,\ Au_0(\varepsilon) \to Au_0.$$

Anche in questo caso, risultati meno precisi, ma sotto ipotesi meno restrittive, sono stati ottenuti da Fattorini [2].

I risultati precedenti non garantiscono però che la convergenza sia uniforme al variare delle condizioni iniziali in un sottoinsieme limitato dello spazio nel quale vengono assegnate.

Infatti, sia $X = \ell^2$, A l'operatore tale che

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ u = \{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \mid \{n^2 u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2 \right\},$$

$$Au = \{- n^2 u_n\}_{n \in \mathbb{N}}\ ;$$

è immediato riconoscere che A genera la funzione coseno astratta $\mathcal{C}$, definita da

$$\mathcal{C}(t)u = \{\cos(nt)\, u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

e il semigruppo analitico S, definito da

$$S(t)u = \left\{ e^{-n^2 t}\, u_n \right\}_{n \in \mathbb{N}}\ .$$

Siano u_ε la soluzione del problema

$$(14) \qquad \begin{cases} \varepsilon^2 u_\varepsilon'' + u_\varepsilon' - Au_\varepsilon = 0\ , \\ u_\varepsilon(0) = v\ ,\ u_\varepsilon'(0) = 0\ , \end{cases}$$

dove $v \in \ell^2$ è indipendente da ε, e z è la soluzione del problema

$$\begin{cases} z' = Az\ , \\ z(0) = v\ . \end{cases}$$

Se $v = \{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, è evidente che

$$z(t) = \left\{ e^{-n^2 t}\, v_n \right\}_{n \in \mathbb{N}}\ .$$

Fissiamo $b \in\ ]0,1[$ e poniamo, $\forall\ m \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_m = \frac{b}{2m}$. Consideriamo l'equazione caratteristica della componente m–esima dell'equazione

$$\varepsilon_m^{\ 2}\, u_\varepsilon'' + u_\varepsilon' - Au_\varepsilon = 0\ ,$$

cioè

$$\varepsilon_m^{\,2}\,\lambda^2 + \lambda + m^2 = 0\ ;$$

essa possiede due radici distinte

$$\lambda_m^{\pm} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - b^2}}{2\varepsilon_m^{\,2}}\ .$$

Pertanto, la componente m–esima della soluzione del problema (14) con $\varepsilon = \varepsilon_m$ è

$$\left(u_{\varepsilon_m}(t)\right)_m = \frac{v_m}{2\sqrt{1 - b^2}}\left(\left(\sqrt{1 - b^2} + 1\right)\exp\left(\frac{-1 + \sqrt{1 - b^2}}{2\varepsilon_m^{\,2}}\,t\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\sqrt{1 - b^2} - 1\right)\ \exp\left(-\frac{1 + \sqrt{1 - b^2}}{2\varepsilon_m^{\,2}}\,t\right)\right),$$

mentre

$$(z(t))_m = e^{-m^2 t}\,v_m\ .$$

Sia $\{t_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ una succesione in $\mathbb{R}^+$, tale che

$$\frac{t_m}{\varepsilon_m^{\,2}} \to +\infty\ ;$$

passando eventualmente a una sottosuccessione, possiamo supporre che

$$\frac{t_m}{\varepsilon_m^{\,2}} \to a$$

e supponiamo, di più, che $a > 0$; allora

$$\|u_{\varepsilon_m}(t_m) - z(t_m)\| \geq \left|\left(u_{\varepsilon_m}(t_m)\right)_m - \left(z(t_m)\right)_m\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{2}(1 - b^2)^{-1/2}\left(\left(\sqrt{1 - b^2} + 1\right)\exp\left(\frac{(-1 + \sqrt{1 - b^2})\,a}{2}\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(\sqrt{1 - b^2} - 1\right)\exp\left(-\frac{1 + \sqrt{1 - b^2}}{2}\,a\right)\right|\ |v_m|\,(1 + o(1)\ ,$$

il che esclude la convergenza uniforme sui limitati.

Per ovviare alle limitazioni illustrate dall'esempio precedente, Fattorini [2] ha utilizzato un tipo di stime diverso, che consente di ottenere la convergenza uniforme al variare dei dati iniziali in un sottoinsieme limitato di X, purché si escluda uno "strato limite" vicino a zero. Cominciamo col dare una definizione precisa di questo tipo di convergenza.

DEFINIZIONE. Siano $\rho : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ una funzione limitata, $\{g_\varepsilon \mid \varepsilon \in \mathbb{R}^+\}$ una famiglia di funzioni da $[0, +\infty[$ a X e $g : [0, +\infty[\to X$. Diremo che $\lim_{\varepsilon\to 0+} g_\varepsilon = g$, uniformemente sui compatti di $[\rho(\varepsilon), +\infty[$ se $\forall\ a > \sup \rho$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\ \sup_{t\in[\rho(\varepsilon),a]}\ \|g_\varepsilon(t) - g(t)\| = 0.$$

Utilizzando questo tipo di convergenza, Fattorini [2] ha ottenuto i risultati seguenti.

<u>TEOREMA 4.</u> Sia $\rho : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ una funzione limitata, tale che

$$\frac{\rho(\varepsilon)}{\varepsilon^2} \underset{\varepsilon \to 0+}{\longrightarrow} +\infty \; ; \tag{15}$$

allora

$$K_\varepsilon(t)x \to S(t)x \, , \; \Sigma_\varepsilon(t)x \to S(t)x \, ,$$

per $\varepsilon \to 0+$, uniformemente sui compatti di $[\rho(\varepsilon), +\infty[$, uniformemente al variare di x nei limitati di X. Con $S(t)$ si è qui indicato il semigruppo analitico generato da A.

Vogliamo ora dare un'idea della dimostrazione. Ricordando che

$$K_\varepsilon(t)x = \int_0^{\frac{t}{\varepsilon}} \phi_\varepsilon(t,s)\mathcal{C}(s)x \; ds \, ,$$

dove

$$\phi_\varepsilon(t,s) = \varepsilon^{-2}\, t \exp(-\frac{t}{2\varepsilon^2}) \frac{I_1\left(\sqrt{(t/\varepsilon)^2 - s^2}/(2\varepsilon)\right)}{\sqrt{(t/\varepsilon)^2 - s^2}}$$

e $\mathcal{C}$ è la funzione coseno astratta generata da A, è necessario avere delle informazioni precise sul comportamento di I_1. Quando s è molto vicino a $\frac{t}{\varepsilon}$, si possono utilizzare stime abbastanza rozze, del tipo

$$\frac{I_1(y)}{y} \le C \frac{e^y}{(2+y)^{3/2}} \; ;$$

ciò però è proficuo solo in un intervallo di lunghezza piccola, collegata all'ampiezza $\rho(\varepsilon)$ dello strato limite, regolato dalla (15); fuori da questo strato, si può invece utilizzare lo sviluppo asintotico per $y \to +\infty$ e cioè

$$I_1(y) = \frac{e^y}{\sqrt{2\pi y}} \left(1 + O(\frac{1}{y})\right) .$$

Per mezzo di queste stime, Fattorini [2] ha potuto dimostrare i seguenti risultati di convergenza delle soluzioni.

<u>TEOREMA 5.</u> Siano $u_0(\varepsilon), u_1(\varepsilon) \in X$, tali che

$$u_0(\varepsilon) \to v \, , \; u_1(\varepsilon) \to u_0 - v \, , \text{ per } \varepsilon \to 0+ \, ,$$

$\rho : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ una funzione limitata, tale che

$$\frac{\rho(\varepsilon)}{\varepsilon^2} \underset{\varepsilon \to 0+}{\longrightarrow} +\infty \, .$$

Allora la soluzione generalizzata u_ε del problema (1) nel caso omogeneo converge, uniformemente sui compatti di $[\rho(\varepsilon), +\infty[$, alla soluzione del problema

$$\begin{cases} z' = Au \\ z(0) = u_0 . \end{cases}$$

La convergenza è anche uniforme rispetto a u_0 e a v, se questi variano in un limitato di X.

Di recente, Engel [1] ha studiato un'equazione più generale, e cioè

$$\varepsilon u_\varepsilon'' + Bu_\varepsilon' + Au_\varepsilon = 0,$$

dove B è un opportuno operatore limitato. Il risultato più significativo è il seguente.

TEOREMA 6. Siano A il generatore infinitesimale di una funzione coseno astratta $\mathcal{C}$, B un operatore limitato che commuta con $\mathcal{C}(t)$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$, e tale che

$$s(B) \equiv \sup \{\mathrm{Re}\, \lambda \mid \lambda \in \sigma(B)\} < 0 ,$$

u_0, $u_1 \in \mathcal{D}(A)$. Allora il problema

$$(16) \qquad \begin{cases} u_\varepsilon'' + 2Bu_\varepsilon' - Au_\varepsilon = 0 , \\ u_\varepsilon(0) = u_0 , \ u_\varepsilon'(0) = u_1 , \end{cases}$$

è ben posto, AB^{-1} genera un semigruppo analitico e la soluzione u_ε del problema (16) converge, per $\varepsilon \to 0+$, alla soluzione del problema

$$\begin{cases} 2Bz' = Az , \\ z(0) = u_0 . \end{cases}$$

La dimostrazione è basata sulla possibilità di fornire una rappresentazione esplicita della soluzione del problema (16), basata sulle funzioni di Bessel modificate di un operatore limitato.

Passiamo ora a considerare il caso di un'equazione non omogenea, ma con condizioni iniziali omogenee. In questo caso i risultati sono però meno numerosi e precisi del caso precedente. Un risultato tipico, dovuto a Fattorini [2] è il seguente.

TEOREMA 7. Siano f_ε, $f \in \mathcal{C}^{\alpha}([0,T];X)$, tali che $f_\varepsilon \to f$ nella topologia di $\mathcal{C}^{\alpha}([0,T];X)$; allora la soluzione generalizzata u_ε del problema (1) con condizioni iniziali nulle converge, uniformemente in [0,T], alla soluzione z del problema (2) con condizioni iniziali nulle e, di più,

$$u_\varepsilon'(t) - \Sigma_\varepsilon(t)f(0) \to z'(t) - S(t)f(0) ,$$

uniformemente in [0,T].

Osservo che il risultato sulla convergenza delle derivate deve contenere un termine correttivo se $f(0) \neq 0$, in quanto

$$u_\varepsilon'(0) = 0 , \ \forall\, \varepsilon > 0 ,$$

mentre

$$z'(0) = \lim_{t \to 0+} z'(t) = Az(0) + f(0) = f(0) .$$

2. Perturbazione singolare di tipo Schrödinger

In meccanica quantistica relativistica si considera l'equazione

(17) $$\frac{\hbar}{2mc^2}\, u_{tt} - iu_t = \frac{\hbar}{2m}\, \Delta u\ ,$$

dove m è la massa della particella e c è la velocità della luce; tale equazione si ricava ponendo

$$u(x,t) = \exp\left(i\,\frac{mc^2}{\hbar}\right)\ v(x,t)$$

nell'equazione di Klein-Gordon per una particella libera

$$-\hbar^2\, v_{tt} = -\,\hbar^2 c^2\, \Delta v + m^2 c^4\, v\ .$$

Poiché il coefficiente di u_{tt} nella (17) è molto piccolo, è interessante esaminare se le soluzioni di (17) approssimano quelle dell'equazione limite.

Se traduciamo questo problema in termini operatoriali, siamo condotti a considerare i problemi

(18) $$\begin{cases} \varepsilon^2\, u_\varepsilon'' - i\, u_\varepsilon' = Au_\varepsilon\ , \\ u_\varepsilon(0) = u_0(\varepsilon),\ u_\varepsilon'(0) = u_1(\varepsilon)\ , \end{cases}$$

(19) $$\begin{cases} z' = iAz\ , \\ z(0) = u_0\ . \end{cases}$$

Ovviamente il problema (18) è ben posto $\forall\ \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ se A è il generatore infinitesimale di una funzione coseno astratta e, in tal caso, si può scriverne la soluzione esplicitamente in una forma analoga alla (8), purché si sostituiscano a t e a ε, rispettivamente, it e $i\varepsilon$. Naturalmente, le funzioni di Bessel modificate avranno ora argomento immaginario e coincideranno quindi con le funzioni di Bessel usuali, il cui comportamento asintotico è completamente diverso da quello delle precedenti. Si noti poi che il termine che nella (8) aveva la forma

$$\exp\left(-\frac{t}{2\varepsilon^2}\right)\ \mathcal{C}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\ u_0(\varepsilon)$$

ora diventa

$$\exp\left(i\,\frac{t}{2\varepsilon^2}\right)\ \mathcal{C}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\ u_0(\varepsilon)\ .$$

Inoltre, mentre nel caso precedente il problema limite era ben posto, ora non vi è motivo perché, in generale, iA generi un semigruppo. Questo problema è stato trattato inizialmente da Veselic ([8],[9]) e da Schoene ([6]), supponendo che X sia uno spazio di Hilbert e che A sia autoaggiunto. Questo, come è ben noto, fa sì che il problema (19) sia ben posto. Successivamente, Fattorini [3] ha generalizzato i loro risultati, supponendo che A sia il generatore infinitesimale di una funzione coseno astratta in uno spazio di Banach, sottoposto però a un'ulteriore restrizione. Nel seguito illustrerò alcuni dei suoi risultati.

Se u_ε è la soluzione del problema (18), essa può essere scritta, poiché il problema è ben posto, come

$$u_\varepsilon(t) = R_\varepsilon(t)u_0(\varepsilon) + T_\varepsilon(t)u_1(\varepsilon)\,,$$

almeno se $u_0(\varepsilon)$, $u_1(\varepsilon) \in \mathcal{D}(A)$; osserviamo però che gli operatori $R_\varepsilon(t)$ e $T_\varepsilon(t)$ appartengono a $\mathcal{L}(X)$. Ebbene, richiediamo che:

IPOTESI AGGIUNTIVA. Siano A il generatore infinitesimale di una funzione coseno astratta, R_ε e T_ε gli operatori di evoluzione del problema (18). Supponiamo che esistano C_1, C_2, ω, indipendenti da ε e da t, tali che:

$$\|R_\varepsilon(t)\| \le C_1 e^{\omega|t|}\,,\ \|T_\varepsilon(t)\| \le C_2\, e^{\omega|t|}\,,\ \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Prima di illustrare i risultati ottenibili con l'ipotesi precedente, vediamo alcuni esempi che ne chiariscono il campo di applicabilità.

PROPOSIZIONE 8. Siano X uno spazio di Hilbert e A il generatore infinitesimale di una funzione coseno astratta uniformemente limitata in X; allora A verifica l'Ipotesi aggiuntiva.

Un risultato che chiarifica ulteriormente il significato dell'ipotesi aggiuntiva è il seguente.

Se X è uno spazio di Hilbert e A è un operatore normale in X, allora A genera una funzione coseno astratta $\mathfrak{C}$ che verifica la stima

$$\|\mathfrak{C}(t)\| \le C \cosh(\omega t)\ ,\ \forall\, t \in \mathbb{R},$$

se, e solo se,

$$\sigma(A) \subseteq \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\,\lambda \le \omega^2 - \frac{(\mathrm{Im}\,\lambda)^2}{4\omega^2} \right\}.$$

Ebbene A verifica l'ipotesi aggiuntiva se, e solo se, $\exists$ a,b $\in \mathbb{R}^+$, tali che

$$\sigma(A) \subseteq \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\,\lambda \le a\,,\ |\mathrm{Im}\,\lambda| \le b \right\}.$$

Un primo risultato significativo, ottenuto come conseguenza dell'ipotesi aggiuntiva, è il seguente.

TEOREMA 9. Sia A il generatore infinitesimale di una funzione coseno astratta; se A verifica l'ipotesi aggiuntiva, allora iA genera un gruppo fortemente continuo.

Questo risultato garantisce quindi che anche il problema limite è ben posto.

Enuncio ora due dei risultati ottenuti da Fattorini [3] per la convergenza delle soluzioni generalizzate.

TEOREMA 10. Siano A il generatore inifinitesimale di una funzione coseno astratta, verificante l'ipotesi aggiuntiva, $u_0 \in \mathcal{D}(A^2)$, $u_0(\varepsilon)$, $u_1(\varepsilon) \in X$. Allora, $\forall\, t \in \mathbb{R}$,

$$\|u_\varepsilon(t) - z(t)\| \le C\, e^{\omega|t|} \left(\|u_0(\varepsilon) - u_0\| + \varepsilon^2 \left(\|Au_0\| + |t|\, \|A^2 u_0\| + \|u_1(\varepsilon)\|\right)\right),$$

dove u_ε è la soluzione generalizzata del problema (18) e z è la soluzione generalizzata del problema (19).

TEOREMA 11. Se A verifica le ipotesi del Teorema 10, $u(\varepsilon)$, $u_1(\varepsilon)$, $u_0 \in X$ e se

$$u_0(\varepsilon) \to u_0\,,\ \varepsilon^2 u_1(\varepsilon) \to 0\,, \quad \text{per } \varepsilon \to 0+\,,$$

allora u_ε converge uniformemente a z sui compatti di $\mathbb{R}$.

BIBLIOGRAFIA

[1] K.-J. ENGEL: On Singualr Perturbations of Second Order Cauchy Problems, Pacific J. Math., **152** (1992), pp. 79-91

[2] H.O.FATTORINI: Singular Perturbation and Boundary Layer for an Abstract Cauchy Problem, J. Math. Anal. Appl., **97** (1983), pp. 529-571

[3] H.O.FATTORINI: On the Schrödinger Singular Perturbation Problem, SIAM J. Math. Anal., **16** (1985), pp. 1000-1019

[4] J. KISYNSKI: On Second Order Cauchy's Problem in a Banach Space, Bull. Accad. Polon. Sci., Ser. Sci. Math., **18** (1970), pp. 371-374

[5] J.-L. LIONS: Perturbations singulières dans les problèmes aux limites et en contrôle optimal, Lecture Notes in Math., n. 323, Springer (1973)

[6] A.Y.SCHOENE: Semi-Groups and a Class of Singular Perturbations Problems, Indiana Univ. Math. J., **20** (1970), pp. 247-264

[7] M. SOVA: Perturbations numériques des évolutions parabolique et hyperbolique, Casopis Pest. Mat., **96** (1971), pp. 406-425

[8] K. VESELIC: The Nonrelativistic Limit of the Dirac Equation and Spectral Concentration, Glas. Mat., **24** (1969), pp. 231-241

[9] K. VESELIC: On the Nonrelativistic Limit of the Bound States of the Klein-Gordon Equation, J. Math. Anal. Appl., **96** (1983), pp. 63-84